

逐段常变量微分方程组渐近概周期解存在唯一性

姚慧丽, 周英红, 赵丽娟

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 本文利用指数二分及差分方程的渐近概周期序列解, 讨论了一类具有变系数逐段常变量微分方程组的渐近概周期解的存在及唯一性.

关键词: 逐段常变量; 渐近概周期解; 指数二分

中图分类号: O177.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2009)05-0114-04

The Unique Existence of Asymptotically Almost Periodic Solutions for the System of Differential Equations with Piecewise Constant Argument

YAO Hui-li, ZHOU Ying-hong, ZHAO Li-juan

(School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In this paper, we discuss the unique existence of asymptotically almost periodic solution for the systems of varying coefficient differential equations with piecewise constant argument by virtue of the exponential dichotomy and asymptotically almost periodic sequence solution of difference equations

Key words: piecewise constant argument; asymptotically almost periodic solutions; the exponential dichotomy

0 引言及预备知识

逐段常变量微分方程描述的是连续与离散的混合动力学行为, 这类方程在单位长的区间上有连续系统的性质, 解在任二相连区间端点的连续性又将诱导解在这些点的值的回复关系, 因而它们结合了微分方程和差分方程的性质, 其概周期解的研究始于袁荣及洪佳林, 之后出现的一系列研究成果见文 [1-5].

用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数, $\mathbf{Z}$ 表示整数集.

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq q} |x_i|, \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^q x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|, \|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2,$$

$$\forall A \in \mathbf{R}^{q \times q}, \forall x \in \mathbf{R}^q$$

$C(\mathbf{R}^q)$ 表示 $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^q$ 的有界连续函数全体. 定义

$\|x\| = \sup_{t \in \mathbf{R}} |x(t)|$, $x \in C(\mathbf{R}^q)$, 则 $C(\mathbf{R}^q)$ 按上述范数构成 Banach 空间.

对于如下逐段常变量微分方程组, 有

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x\left[t + \frac{1}{2}\right] + f(t) \quad (1)$$

其中 $A(t), B(t) \in C(\mathbf{R}^q)$, 杨喜陶研究了方程 (1) 的概周期解及伪概周期解的存在唯一性. 本文主要讨论当 $f(t) \in \text{AAP}(\mathbf{R}^q)$ 时, 其渐近概周期解的存在唯一性.

定义 1^[1] 函数 $x(t) \in C(\mathbf{R}^q)$ 称为式 (1) 的解, 是指:

1) $x(t)$ 的一阶导数除了在 $t = n + \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbf{Z}$) 存在单侧导数外, 在 $\mathbf{R}$ 上处处存在;

2) 在每一区间 $\left[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]$ ($n \in \mathbf{Z}$) 上, $x(t)$ 都

收稿日期: 2008-10-12

基金项目: 国家自然科学基金(天元基金)资助项目(10626014)

作者简介: 姚慧丽(1971—), 女, 博士, 教授, E-mail: huili_yao@sohu.com.

满足式(1).

设 $X(t)$ 为方程

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2)$$

满足 $X(0) = I$ (I 为单位矩阵) 的基解矩阵. 首先假

设 $I - \int_{\frac{1}{2}}^1 X(n+1)X^{-1}(s+n)B(s+n)ds$ 与 $X(n +$

$1)X^{-1}(n) + \int_0^{\frac{1}{2}} X(n+1)X^{-1}(s+n)B(s+n)ds$ 可

逆. 设 $x(t)$ 为方程(1)的解, 则对 $n - \frac{1}{2} \leq t < n +$

$\frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$x(t) = X(t) \left[\left(X^{-1}(n) + \int_n^t (s)B(s)ds \right) x(n) + \int_n^t (s)f(s)ds \right] \quad (3)$$

由 $x(t)$ 在 $t = n + \frac{1}{2}$ 处连续得

$$x(n+1) = C(n)x(n) + h_n \quad (4)$$

其中

$$C(n) = \left(I - \int_{\frac{1}{2}}^1 X(n+1)X^{-1}(s+n)B(s+n)ds \right)^{-1} \times \left(X(n+1)X^{-1}(n) + \int_0^{\frac{1}{2}} X(n+1)X^{-1}(s+n)B(s+n)ds \right)$$

$$h_n = \left(I - \int_{\frac{1}{2}}^1 X(n+1)X^{-1}(s+n)B(s+n)ds \right)^{-1} \times \int_0^{\frac{1}{2}} X(n+1)X^{-1}(s+n)f(s+n)ds$$

式(4)所对应的齐次方程为

$$x(n+1) = C(n)x(n) \quad (5)$$

方程(5)具有指数二分, 是指存在投影为 P ($P^2 = P$), $K \geq 1, \alpha > 0$, 使得

$$|Y(n)PY^{-1}(m)| \leq Ke^{-\alpha(n-m)}, \quad n \geq m$$

$$|Y(n)(I-P)Y^{-1}(m)| \leq Ke^{-\alpha(m-n)}, \quad m \geq n$$

其中, $Y(n)$ 为方程(5)满足 $Y(0) = I$ 的基解矩阵.

定义 2^[7] 函数 $f(t) \in C(\mathbb{R}^q)$ 称为概周期, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 集合

$T(f, \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} \mid |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中相对稠密集, 即存在 $l > 0$, 使得对任意 $a \in \mathbb{R}$, $[a, a+l] \cap T(f, \varepsilon) \neq \emptyset$. $AP(\mathbb{R}^q)$ 表示 $C(\mathbb{R}^q)$ 的所有概周期函数.

定义 3^[8] 序列 $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^q$ 称为概周期, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 集合

$$T(f, \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} \mid |x(n+\tau) - x(n)| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

是 $\mathbb{Z}$ 中的相对稠密集. $APS(\mathbb{R}^q)$ 表示定义域为 $\mathbb{Z}$, 值域为 $\mathbb{R}^q$ 的所有概周期序列.

定义 4^[7] $C_0(\mathbb{R}^q)$ 表示 $C(\mathbb{R}^q)$ 中满足 $\lim_{|t| \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 的函数的全体.

定义 5^[7] $C_0S(\mathbb{R}^q)$ 表示满足 $\lim_{|n| \rightarrow \infty} x(n) = 0$ 的序列的全体.

定义 6^[7] 称函数 $f(t) \in C(\mathbb{R}^q)$ 为渐近概周期函数, 是指能写成 $f = g + h$, 其中 $g \in AP(\mathbb{R}^q)$, $h \in C_0(\mathbb{R}^q)$. 用 $AAP(\mathbb{R}^q)$ 表示渐近概周期函数.

定义 7^[7] 称序列 $\{x(n): n \in \mathbb{Z}\}$ 为渐近概周期序列, 是指 x 能写成 $x = x_1 + x_2$, 其中 $x_1 \in APS(\mathbb{R}^q)$, $x_2 \in C_0S(\mathbb{R}^q)$. 用 $AAPS(\mathbb{R}^q)$ 表示渐近概周期序列.

引理 1^[6] 设 $\sup_{t \in \mathbb{R}} |A(t)| \leq M$, $X(t)$ 为方程(2)的满足 $X(0) = I$ 的基解矩阵, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\tau \in T(A, \varepsilon)$, 则

$$|X(t)X^{-1}(s)| \leq e^{M|t-s|}, \quad a \leq t-s \leq b,$$

$$|X(t+\tau)X^{-1}(s+\tau) - X(t)X^{-1}(s)| \leq \varepsilon e^{2Mb_1},$$

$$a \leq t-s \leq b,$$

其中 $b_1 = \max(|a|, |b|)$.

由此引理易知, 当 $f(t) \in AAP(\mathbb{R}^q)$ 时, $h_n \in AAPS(\mathbb{R}^q)$.

2 主要结果

定理 1 假设式(5)对于 $\forall n \in \mathbb{Z}$ 具有指数二分, 则有:

1) 对于任意序列 $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\} \in C_0S(\mathbb{R}^q)$, 式(4)有唯一的解 $y(n) \in C_0S(\mathbb{R}^q)$;

2) 对于任意序列 $\{C_n, n \in \mathbb{Z}\} \in APS(\mathbb{R}^q)$, 以及任意序列 $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\} \in AAPS(\mathbb{R}^q)$, 式(4)有唯一的渐近概周期解.

证明: 1) 设 $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\} \in C_0S(\mathbb{R}^q)$. 考虑序列

$$y(n) = \sum_{m \leq n-1} Y(n)PY^{-1}(m+1)h(m) - \sum_{m \geq n} Y(n)(I-P)Y^{-1}(m+1)h(m),$$

$$(n \in \mathbb{Z})$$

首先证明 $y(n)$ 是有定义的. 考虑下式:

$$S_1(n) = \sum_{m \leq n-1} |Y(n)PY^{-1}(m+1)| |h(m)|$$

$$S_2(n) = \sum_{m \geq n} |Y(n)(I-P)Y^{-1}(m+1)| |h(m)|$$

因为 $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\} \in C_0S(\mathbb{R}^q)$, 所以存在 $0 < M < +\infty$, 使 $|h(n)| \leq M$, 所以由引理 1 得

$$S_1(n) \leq KM \sum_{m \leq n-1} e^{-\alpha(n-m-1)} = \frac{KM}{1-e^{-\alpha}} < +\infty$$

这说明对于每一个固定的 $n \in \mathbf{Z}$, $S_1(n)$ 都有定义. 类似的可证 $S_2(n)$ 也有定义. 又因为

$$|y(n)| \leq S_1(n) + S_2(n),$$

所以 $\{y(n)\}$ 在 $\mathbf{Z}$ 上有定义. 易证 $y(n)$ 是 (4) 式的解. 因为

$$|y(n)| \leq M \left[\sum_{m \leq n-1} |Y(n) P Y^{-1}(m+1)| + \sum_{m \leq n} |Y(n) (I - P) Y^{-1}(m+1)| \right] \leq KM \sum_{m \leq n} e^{-\alpha|n-m-1|} \leq KM (1 + e^{-\alpha}) (1 - e^{-\alpha})^{-1}$$

所以 $\{y(n)\}$ 是有界的. 由文 [6] 中引理 3.2 知, $\{y(n)\}$ 是式 (4) 唯一的有界解.

下证 $y(n) \in C_0 S(\mathbf{R}^q)$, 首先证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y(n) = 0$

因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\alpha(n-1)} = 0$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|e^{-\alpha(n-1)}| < \varepsilon$, 又因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 0$, 即对上述的有 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $|h(n)| < \varepsilon$, 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, $|y(n)| \leq S_1(n) + S_2(n)$, 其中

$$S_1(n) = \sum_{m \leq n-1} |Y(n) P Y^{-1}(m+1)| |h(m)| \leq \sum_{m \leq n-1} K e^{-\alpha(n-m-1)} |h(m)| = \sum_{m=-\infty}^{-1} K e^{-\alpha(n-m-1)} |h(m)| + \sum_{m=0}^{N-1} K e^{-\alpha(n-m-1)} |h(m)| + \sum_{m=N}^{n-1} K e^{-\alpha(n-m-1)} |h(m)| = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 \leq KM e^{-\alpha(n-1)} \sum_{m=-\infty}^{-1} e^{-\alpha(-m)} = \frac{KM e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} e^{-\alpha(n-1)} < \frac{KM e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \varepsilon$$

$$I_2 \leq KM e^{-\alpha(n-1)} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\alpha(-m)} \leq \frac{KM (1 - e^{-\alpha N})}{1 - e^{-\alpha}} e^{-\alpha(n-1)} < \frac{KM (1 - e^{-\alpha N})}{1 - e^{-\alpha}} \varepsilon$$

$$I_3 < K \varepsilon \sum_{m=N}^{n-1} e^{-\alpha(n-m-1)} = K \frac{1 - e^{-\alpha(n-N)}}{1 - e^{-\alpha}} \varepsilon < \frac{K}{1 - e^{-\alpha}} \varepsilon$$

$$S_2(n) = \sum_{m \leq n} K e^{-\alpha(n-m-1)} |h(m)| <$$

$$\varepsilon \sum_{m \leq n} K e^{-\alpha(n-m-1)} = \frac{K e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \varepsilon$$

于是有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y(n) = 0$, 类似的可证 $\lim_{n \rightarrow -\infty} y(n) = 0$ 所

以 $\lim_{|n| \rightarrow \infty} y(n) = 0$, 即 $y(n) \in C_0 S(\mathbf{R}^q)$.

2) 因为 $\{h_n, n \in \mathbf{Z}\} \in \text{AAP}(\mathbf{R}^q)$, 所以 $h_n = h_{n_1} + h_{n_2}$, 其中 $h_{n_1} \in \text{APS}(\mathbf{R}^q)$, $h_{n_2} \in C_0 S(\mathbf{R}^q)$, 由文 [3] 的引理 3.4 知, 方程

$$x(n+1) = C(n)x(n) + h_{n_1}$$

有唯一的解 $\{y_1(n)\}_{n \in \mathbf{Z}} \in \text{APS}(\mathbf{R}^q)$. 而由 1) 知, 方程

$$x(n+1) = C(n)x(n) + h_{n_2}$$

有唯一的解 $\{y_2(n)\}_{n \in \mathbf{Z}} \in C_0 S(\mathbf{R}^q)$. 因此 $\{y(n) : y(n) = y_1(n) + y_2(n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ 是式 (4) 唯一的渐近概周期解.

定理 2 设 $A(t), B(t) \in \text{AP}(\mathbf{R}^{q \times q})$, $f(t) \in \text{AAP}(\mathbf{R}^q)$, 且 $\{c_n\} \in \text{AAP}(\mathbf{R}^q)$ 为方程 (4) 的解, 则方程 (1) 有唯一的有界解 $x(t) \in \text{AAP}(\mathbf{R}^q)$, 满足 $x(n) = c_n$, ($\forall n \in \mathbf{Z}$).

证明: 设 $c_n = c_{n_1} + c_{n_2}$, 其中 $c_{n_1} \in \text{APS}(\mathbf{R}^q)$, $c_{n_2} \in C_0 S(\mathbf{R}^q)$, $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, 其中 $f_1(t) \in \text{AP}(\mathbf{R}^q)$, $f_2(t) \in C_0(\mathbf{R}^q)$. 且令

$$x(t) = X(t) \left[\left(X^{-1}(n) + \int_n^t (s) B(s) ds \right) c_n + \int_n^t (s) f(s) ds \right] \\ n - \frac{1}{2} \leq t < n + \frac{1}{2}, n \in \mathbf{Z}$$

则易知 $x(t)$ 为方程 (1) 的解.

因为

$$x(t) = X(t) \left[\left(X^{-1}(n) + \int_n^t (s) B(s) ds \right) c_n + \int_n^t (s) f(s) ds \right] = X(t) \left[\left(X^{-1}(n) + \int_n^t (s) B(s) ds \right) (c_{n_1} + c_{n_2}) + \int_n^t (s) (f_1(s) + f_2(s)) ds \right] = X(t) \left[\left(X^{-1}(n) + \int_n^t (s) B(s) ds \right) c_{n_1} + \int_n^t (s) f_1(s) ds \right] + X(t) \left[\left(X^{-1}(n) + \int_n^t (s) B(s) ds \right) c_{n_2} + \int_n^t (s) f_2(s) ds \right] = I(t) + II(t)$$

其中, 记

$$I(t) = X(t) \left[\left(X^{-1}(n) + \int_n^t (s) B(s) ds \right) c_{n_1} + \int_n^t (s) f_1(s) ds \right]$$

$$H(t) = X(t) \left(\left[X^{-1}(n) + \int_n^t (s) B(s) ds \right] c_{n_2} + \int_n^t (s) f_2(s) ds \right)$$

要证 $x(t) \in \text{AAP}(\mathbf{R}^q)$, 只需证 $I(t) \in \text{AP}(\mathbf{R}^q)$, $H(t) \in C_0(\mathbf{R}^q)$. 由文 [1] 中引理 3 知, $I(t) \in \text{AP}(\mathbf{R}^q)$, 下面只需证 $H(t) \in C_0(\mathbf{R}^q)$.

设 $M = \max(\sup_{t \in \mathbf{R}} |A(t)|, \sup_{t \in \mathbf{R}} |B(t)|)$, 由 $f_2(t) \in C_0(\mathbf{R}^q)$ 得, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_1 > 0$, 当 $t > t_1$ 或 $t < -t_1$ 时, 有 $|f(t)| < \varepsilon$, 则

$$H(t) \leq \left| X(t) \left(X^{-1}(n) + \int_n^t (s) B(s) ds \right) c_{n_2} \right| + \left| X(t) \int_n^t (s) f_2(s) ds \right| = I_1(t) + I_2(t)$$

由引理 1 得

$$I_1(t) \leq \left(|X(t) X^{-1}(n)| + \int_n^t |X(t) X^{-1}(s)| |B(s)| ds \right) c_{n_2} \leq \left(e^{\frac{M}{e^2}} + \frac{M}{2} \frac{M}{e^2} \right) c_{n_2}$$

当 $|t| \rightarrow \infty$, 有 $|n| \rightarrow \infty$, 又因为 $c_{n_2} \in C_0 S(\mathbf{R}^q)$, 所以 $I_1(t) \rightarrow 0$, 即 $I_1(t) \in C_0(\mathbf{R}^q)$. 而另一方面当 $t > t_1 + 1$ 或 $t < -t_1 - 1$ 时, 且 $n \leq s \leq t$, 有 $s > t_1$ 或 $s < -t_1$, 则 $|f(s)| < \varepsilon$, 故

$$I_2(t) = \int_n^t (s) X^{-1}(s) f_1(s) ds \leq \frac{1}{2} \frac{M}{e^2} \int_n^t (s) ds \leq \frac{1}{4} \frac{M}{e^2} \varepsilon$$

证得 $I_2(t) \in C_0(\mathbf{R}^q)$, 所以 $H(t) \in C_0(\mathbf{R}^q)$. 从而当 $f(t) \in \text{AAP}(\mathbf{R}^q)$, 且 $\{c_n\} \in \text{AAPS}(\mathbf{R}^q)$ 时, 有

$x(t) \in \text{AAP}(\mathbf{R}^q)$.

设 $p(t)$ 是方程 (1) 的定义于 $\mathbf{R}$ 的任意有界解, 则 $p(t)$ 满足式 (3)、式 (4), 由文 [3] 中的定理 5.7 知, 式 (4) 有唯一的有界解, 故 $x(n) = p(n)$, $\forall n \in \mathbf{Z}$ 由式 (3) 知 $x(t) = p(t)$, $\forall t \in \mathbf{R}$, 所以 $x(t)$ 是方程 (1) 的唯一的渐近概周期解.

参考文献:

- [1] PIAO D. Pseudo Almost Periodic Solutions for the Systems of Differential Equations with Piecewise Constant Argument [J]. Sci. in China, Ser A, 2003, 33(11): 220 - 225.
- [2] YUAN R, HONG J. The Existence of Almost Periodic Solutions for a Class of Differential Equations with Piecewise Constant Argument [J]. Nonlinear Analysis TMA, 1997, 28(3): 1439 - 1450.
- [3] HONG J, OBAYA R, SANZ A. Almost Periodic Type Solutions of Some Differential Equations with Piecewise Constant Argument [J]. Nonlinear Analysis, 2001, 45(2): 661 - 688.
- [4] 许广涛, 姚慧丽. 一类时滞微分方程的渐近概周期解的存在性 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2008, 13(1): 106 - 108.
- [5] 姚慧丽, 殷红红. 具有逐段常变量的二阶中立型微分方程渐近概周期解存在性 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2007, 12(3): 103 - 106.
- [6] YANG Xitao. The Unique Existence of Almost Periodic Solutions for the System of Differential Equations with Piecewise Constant Argument [J]. ACTA Mathematica SINICA, 2007, 50(2): 461 - 472.
- [7] ZHANG Chuanyi. Almost Periodic Type Functions and Ergodicity [M]. Beijing: Science Press, 2003.
- [8] COPPEL W A. Dichotomies in Stability Theory [J]. Lecture Notes in Mathematics, New York: Springer-Verlag, 1978, 629: 67 - 69.

(编辑:付长缨)